Početní část 2 - 25.1.2021

3. Nejdříve použijeme úpravu

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Poté tedy jednoduše máme

$$\int e^{3x}\cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int e^{3x}(1+\cos(2x))\, dx = \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{1}{2}\int e^{3x}\cos(2x)\, dx.$$

Na poslední integrál použijeme dvakrát integraci per partes a dostaneme

$$\begin{aligned} I := \int e^{3x}\frac{\cos(2x)}{2}\, dx &= e^{3x}\frac{\sin(2x)}{4} - \int e^{3x}\frac{3\sin(2x)}{4}\, dx \\ &= e^{3x}\frac{\sin(2x)}{4} + e^{3x}\frac{3\cos(2x)}{8} - \int e^{3x}\frac{9\cos(2x)}{8}\, dx \\ &= e^{3x}\frac{\sin(2x)}{4} + e^{3x}\frac{3\cos(2x)}{8} - \frac{9}{4}I \end{aligned}$$

a tedy

$$I = \frac{1}{26}\left(2e^{3x}\sin(2x) + 3e^{3x}\cos(2x)\right).$$

Dosazeními zpět do původního integrálu tak máme

$$\int e^{3x}\cos^2 x\, dx = \frac{e^{3x}}{6} + \frac{2e^{3x}\sin(2x) + 3e^{3x}\cos(2x)}{26} + C.$$

Integrál existuje pro $x \in \mathbb{R}$.

4.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(|x|^7)$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(|x|^7)$$

3b) S použitím výše uvedeného máme tedy pro $x \to 0$

$$\begin{aligned}
\sin(\sinh x) &= \sin\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(|x|^7)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(|x|^7) - \frac{(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(|x|^7))^3}{3!} \\
&\quad + \frac{(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(|x|^7))^5}{5!} - \frac{(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(|x|^7))^7}{7!} \\
&\quad + o\left(\left|x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(|x|^7)\right|^7\right) \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^3 + \frac{x^5}{2} + \frac{3x^7}{5!} + \frac{x^7}{12}}{6} + \frac{x^5 + \frac{5x^7}{6}}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(|x|^7) \\
&= x + x^5\left(\frac{2}{5!} - \frac{1}{12}\right) - x^7\left(\frac{1}{72} - \frac{2}{6!}\right) + o(|x|^7).
\end{aligned}$$

Konečně

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sinh x) + ax + bx^3 + cx^5}{x^7} = d \in \mathbb{R}$$

pro $a = -1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{12} - \frac{2}{5!}$ a $d = \frac{2}{6!} - \frac{1}{72}$.